Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

# Matemáticas
# Nivel superior
# Prueba 2

Miércoles 11 de mayo de 2016 (mañana)

Número de convocatoria del alumno

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

2 horas

**Instrucciones para los alumnos**

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[120 puntos]**.



2216 – 7226

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

## Sección A

Conteste **todas** las preguntas en las casillas provistas. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

**1.** [Puntuación máxima: 5]

$\mathrm{ABCD}$ es un cuadrilátero en el que $\mathrm{AB} = 6{,}5$; $\mathrm{BC} = 9{,}1$; $\mathrm{CD} = 10{,}4$; $\mathrm{DA} = 7{,}8$ y $\mathrm{C\hat{D}A} = 90^\circ$. Halle $\mathrm{A\hat{B}C}$, y dé la respuesta aproximando al número de grados más próximo.

**2.** [Puntuación máxima: 7]

Una variable aleatoria $X$ sigue una distribución normal de media $3$ y varianza igual a $2^2$.

(a) Halle $\mathrm{P}(0 \leq X \leq 2)$. [2]

(b) Halle $\mathrm{P}(|X| > 1)$. [3]

(c) Sabiendo que $\mathrm{P}(X > c) = 0{,}44$, halle el valor de $c$. [2]

**3.** [Puntuación máxima: 6]

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\ln \frac{y}{x} = 2$$

$$\ln x^2 + \ln y^3 = 7\,.$$

**4.** [Puntuación máxima: 6]

La suma del segundo y el tercer término de una progresión geométrica es igual a $96$.

La suma de los infinitos términos de esta progresión es igual a $500$.

Halle los posibles valores de la razón común, $r$.

**5.** [Puntuación máxima: 6]

La función $f$ se define mediante $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $-1 < x \leq 1$.

Halle la función inversa, $f^{-1}$, e indique el dominio y el recorrido de dicha función.

**6.** [Puntuación máxima: 8]

Una empresa fabrica láminas de vidrio rectangulares de $5$ metros cuadrados de área. Durante el proceso de fabricación de estas láminas de vidrio aparecen defectos, que se producen a razón de $0{,}5$ por cada $5$ metros cuadrados. Se supone que el número de defectos por lámina de vidrio sigue una distribución de Poisson.

(a) Halle la probabilidad de que una lámina de vidrio elegida al azar contenga al menos un defecto. [3]

Las láminas de vidrio que no tienen ningún defecto generan un beneficio de $\$5$. Las láminas de vidrio que tienen al menos un defecto ocasionan una pérdida de $\$3$.

(b) Halle el beneficio esperado, $P$ dólares, que se obtiene por cada lámina de vidrio. [3]

Esta empresa también fabrica láminas de vidrio más grandes, de $20$ metros cuadrados de área. La razón a la que se producen defectos sigue siendo de $0{,}5$ por cada $5$ metros cuadrados.
Se elige al azar una de estas láminas de vidrio grandes.

(c) Halle la probabilidad de que no contenga ningún defecto. [2]

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**7.** [Puntuación máxima: 8]

Considere la curva que viene dada por la ecuación $x^3 + y^3 = 4xy$.

(a) Utilice la derivación implícita para mostrar que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{4y - 3x^2}{3y^2 - 4x}$. [3]

La tangente a esta curva es paralela al eje $x$ en el punto donde $x = k$, $k > 0$.

(b) Halle el valor de $k$. [5]

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**8.** [Puntuación máxima: 6]

Una partícula se mueve de modo tal que su velocidad $v\,\text{ms}^{-1}$ y su desplazamiento $s$ m, están relacionados mediante la ecuación $v(s) = \arctan(\text{sen}\, s)$, $0 \le s \le 1$. La aceleración de la partícula es $a\,\text{ms}^{-2}$.

(a) Halle la aceleración de la partícula en función de $s$. [4]

(b) Utilizando un gráfico aproximado adecuado, halle el desplazamiento de la partícula cuando su aceleración es igual a $0{,}25\,\text{ms}^{-2}$. [2]

**9.** [Puntuación máxima: 8]

OACB es un paralelogramo en el que $\vec{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$ y $\vec{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores no nulos.

(a) Muestre que

(i) $|\vec{\mathrm{OC}}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2$;

(ii) $|\vec{\mathrm{AB}}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2$. [4]

(b) Sabiendo que $|\vec{\mathrm{OC}}| = |\vec{\mathrm{AB}}|$, demuestre que OACB es un rectángulo. [4]

**No** escriba soluciones en esta página.

## Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

**10.** [Puntuación máxima: 15]

Una variable aleatoria continua $T$ tiene la siguiente función densidad de probabilidad $f$

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t\left|\operatorname{sen} 2t\right|}{\pi}, & 0 \le t \le \pi \\ 0, & \text{resto de valores} \end{cases}$$

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(t)$. [2]

(b) Utilice este gráfico aproximado para hallar la moda de $T$. [1]

(c) Halle la media de $T$. [2]

(d) Halle la varianza de $T$. [3]

(e) Halle la probabilidad de que el valor de $T$ esté comprendido entre la media y la moda. [2]

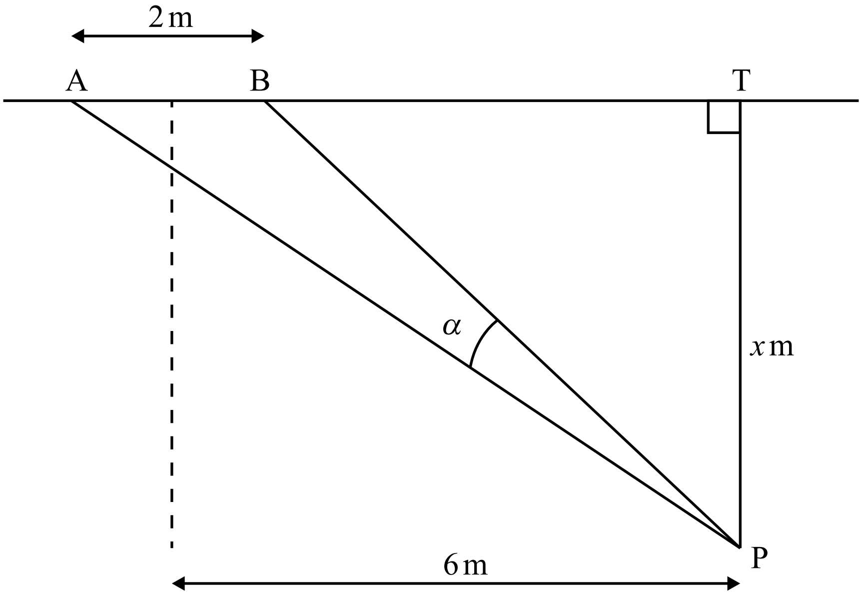
(f) (i) Halle $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$ donde $0 \le T \le \dfrac{\pi}{2}$.

(ii) A partir de lo anterior, verifique que el primer cuartil de $T$ es $\dfrac{\pi}{2}$. [5]

**No** escriba soluciones en esta página.

**11.** [Puntuación máxima: 22]

Los puntos $\mathrm{A}, \mathrm{B}$ y $\mathrm{T}$ se encuentran sobre una línea de una cancha de fútbol sala. La portería, $[\mathrm{AB}]$, tiene $2$ metros de ancho. Un jugador situado en el punto $\mathrm{P}$ patea el balón en dirección a la portería. $[\mathrm{PT}]$ es perpendicular a $(\mathrm{AB})$ y se encuentra a $6$ metros de una recta paralela que pasa por el centro de $[\mathrm{AB}]$. Sea $\mathrm{PT}$ igual a $x$ metros y sea $\alpha = \mathrm{A\hat{P}B}$, medido en grados. Suponga que el balón se desplaza sobre el piso.




(a) Halle el valor de $\alpha$ cuando $x = 10$. [4]

(b) Muestre que $\tan\alpha = \dfrac{2x}{x^2 + 35}$. [4]

El valor de $\alpha$ es máximo cuando el valor de $\tan\alpha$ es máximo.

(c) (i) Halle $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan\alpha)$.

(ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el valor de $\alpha$ tal que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan\alpha) = 0$.

(iii) Halle $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\tan\alpha)$ y, a partir de lo anterior, muestre que el valor de $\alpha$ nunca supera los $10^\circ$. [11]

(d) Halle el conjunto de valores de $x$ para los cuales $\alpha \geq 7^\circ$. [3]

**No** escriba soluciones en esta página.

**12.** [Puntuación máxima: 23]

Las funciones $f$ y $g$ se definen mediante

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$$

(a) (i) Muestre que $\frac{1}{4f(x) - 2g(x)} = \frac{e^x}{e^{2x} + 3}$.

(ii) Utilice la sustitución $u = e^x$ para hallar $\int_0^{\ln 3} \frac{1}{4f(x) - 2g(x)} dx$. Dé la respuesta en la forma $\frac{\pi\sqrt{a}}{b}$ donde $a, b \in \mathbb{Z}^+$. [9]

Sea $h(x) = nf(x) + g(x)$ donde $n \in \mathbb{R}$, $n > 1$.

(b) (i) Resuelva la ecuación $h(x) = k$, donde $k \in \mathbb{R}^+$, formando para ello una ecuación cuadrática en $e^x$.

(ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, muestre que la ecuación $h(x) = k$ tiene dos soluciones reales siempre que se cumpla que $k > \sqrt{n^2 - 1}$ y $k \in \mathbb{R}^+$. [8]

Sea $t(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.

(c) (i) Muestre que $t'(x) = \frac{[f(x)]^2 - [g(x)]^2}{[f(x)]^2}$ para $x \in \mathbb{R}$.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que $t'(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}$. [6]

**No** escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

**No** escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.

**No** escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.